移動音源による音場の積分変換を用いた解析とその誤差の検討

交通システム研究領域　※緒方正剛　中島弘史　鶴 秀生（日東紡音響エンジニアリング㈱）

１．はじめに

道路沿道や鉄道沿線住民の生活環境保全を目的とする騒音対策手法の一つとして、防音壁が用いられている。交通機関の騒音の予測に際しては、実際には移動している音源を静止したものと仮定して、受音点での騒音を求める手法が用いられる。しかし本来、音源が移動する場合はドップラー効果により周波数の変調や指向性が変化することが知られており、移動速度が速くなるとその変化が無視できない。

本論文では, 鉄道などの遮音壁の効果予測をする際に多く用いられている Duhamel の手法の実際の数値計算方法を述べると共に, その誤差のオーダーを理論的に解析した。

さまざまな形状や材質の遮音壁の効果を予測することは, 騒音分野での重要なテーマである。数値計算により効果を予測することが行われている[1,2]が、計算量の点で２次元解析が主である。２次元解析は, 線音源からの放射音場の予測に相当する。しかし実際の音源は, 列車や自動車等であり, 点あるいは線上に連続的に配置された無相関な点音源（非干渉性線音源）としてモデル化する方がより実際に近い。実際に, 線音源と非干渉性線音源について遮音壁の効果が異なる事が示されている[3]。これに対し Duhamel は２次元解を元に３次元への積分変換を行い，２次元的なパターン境界における点音源からの音場を解析する方法を提案した[4]。この方法は, 計算量の少ない２次元解析を元に３次元の点音源による音場解析が可能である[5~7]。しかし[4~7]のいずれにおいても, 実際の数値計算方法が詳細に述べられておらず、積分変換を利用した数値解析を追試することが困難となっている。また数値計算上の誤差に関する検討がなされていないため, 算出した結果の精度が明らかでない。本論文では, 上記の問題を解決するため, 積分変換を用いた移動音源の数値解析についての実際の数値計算方法, 誤差の検討について述べる。

２．積分変換による移動音源のシミュレーション

図-1 のように, ある軸での断面形状が変化しない２次元的なパターンの境界において, 音源がパターンに平行に移動する場合, ２次元音場のシミュレーション結果から, ３次元音場のシミュレーション結果を得ることができる[4]。

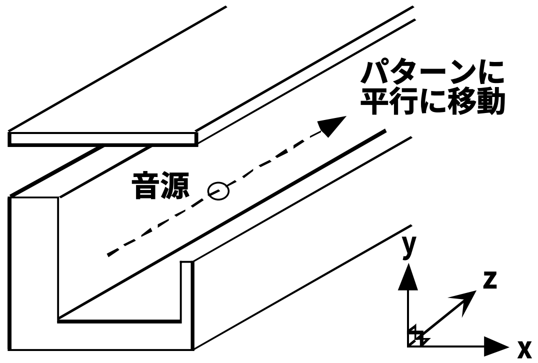

図１　２次元パターン境界と平行移動音源

音場における音圧 p および粒子速度 $\mathbf{v}$ [m/s]は時間 t [s], 密度 $\rho\,[kg/m^3]$, 速度ポテンシャル $\phi\,[m^2/s]$ とすれば、

$$p = \rho\frac{\partial\phi}{\partial t},\quad \mathbf{v} = -\nabla\phi \tag{1}$$

となる[8]。ϕ は, [4]より次式の解として与えられる。

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(k_z,\omega)\Phi_{xy}(x,y,\sqrt{k^2-k_z^2})e^{ik_z z}e^{-i\omega t}\mathrm{d}k_z\mathrm{d}\omega \tag{2}$$

$$S(k_z,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-ik_z z_0(t)}e^{i\omega t}\mathrm{d}t \tag{3}$$

ここで, $s(t)$ は体積速度[m^3/s]を単位とする音源波形, $\mathbf{x}$ は受音点の位置[m], $\mathbf{x}_0(t) = (x_0, y_0, z_0(t))$ は音源の位置[m]である。音源は, z 軸に平行に移動するものとした。

これは, ２次元音場 $\Phi_{xy}(x,y,k_{xy})$ と移動を考慮した音源の周波数特性 $S(k_z,\omega)$ から, ３次元音場が計

算できることをあらわす。音場の数値シミュレーションでは，２次元問題の解析は３次元の場合に比較して，演算量や必要メモリが少なくてすむという利点がある。ただし，通常の２次元問題の解析と違い，波数が虚数となる範囲についても行う必要がある。

音源が等速度で移動($z_0(t)=Vt$)した場合，$S(k_z,\omega)$は，元の音源波形$s(t)$のフーリエ変換$\hat{S}(\omega)$を用いて、

$$S(k_z,\omega)=\hat{S}(\omega-k_zV) \tag{4}$$

となる。 ωの積分を移動を考慮した周波数$\omega'=\omega-k_zV$による積分に変数変換すれば，

$$\phi(x,y,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{S}(\omega')\hat{\Phi}(x,y,\omega',t)e^{-i\omega't}\mathrm{d}\omega' \tag{5}$$

$$\hat{\Phi}(x,y,\omega',t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{xy}(x,y,\sqrt{(\tfrac{\omega'+k_zV}{c})^2-k_z^2})e^{ik_z(z-Vt)}\mathrm{d}k_z \tag{6}$$

となる。従って，等速移動音源の場合，(6)により音場の特性$\hat{\Phi}(x,y,\omega',t)$を計算しておけば，音源特性$\hat{S}(\omega)$が変化した場合にも，(5)の周波数合成のみによってϕを得ることができる。

３．数値計算方法とその誤差

ここでは簡単のため等速移動音源の場合について取り扱う。

３．１．音場特性の算出

音場の特性$\hat{\Phi}(x,y,\omega',t)$を(6)により実際に計算するためには，以下の３点を考慮する必要がある。それぞれについて，誤差の理論的解析を行う。

①積分範囲

積分範囲は－∞～∞であるが実際は打ち切る必要があり，その誤差が発生する。

②特異点とその周辺

積分中に$k_{xy}=0$となる点で$\Phi_{xy}(x,y,k_{xy})$が発散する。この点とその周辺を避けて積分を行う必要があり，そのための誤差が発生する。

③積分間隔

数値計算では積分変数を離散化して和として計算する必要があり，これによる誤差が発生する。この積分時の離散化間隔を以後，積分間隔と略記する。

３．１．１．正規化波数

(6)の理論解析を行う上で式を簡略化するため，次式の正規化波数$\bar{k}_z$（図-2）を導入する。

$$\bar{k}_z=\frac{c}{\omega'}(1-M^2)k_z-M \tag{7}$$

ここでMはマッハ数（$M=\dfrac{V}{c}$）である。(6)を$\bar{k}_z$の積分に変換すると、

$$\hat{\Phi}(x,y,\omega',t)=\frac{1}{2\pi W}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{xy}(x,y,k_{xy})e^{iW(\bar{k}_z+M)(z-Vt)}\mathrm{d}\bar{k}_z$$

$$k_{xy}=A\sqrt{1-\bar{k}_z^{\,2}}$$

$$A=\frac{\omega'}{c}\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}\ ,\ W=\frac{\omega'}{c}\frac{1}{1-M^2} \tag{8}$$

となり，２次元音場での波数k_{xy}の引数が簡略化され，特異点が$\bar{k}_z=\pm1$となる。

３．１．２．積分範囲

(8)における$\bar{k}_z$の積分範囲は－∞～∞であるが，数値計算では打ち切りが必要となる。$\bar{k}_z$を－∞～$\bar{k}_{z\max}$，（$\bar{k}_{z\max}>1$）で打ち切った場合の誤差I_{kz}は、

$$I_{kz}=\frac{1}{2\pi W}\int_{\bar{k}_{z\max}}^{\infty}\Phi_{xy}(x,y,A\sqrt{1-\bar{k}_z^{\,2}})e^{iW(\bar{k}_z+M)(z-Vt)}\mathrm{d}\bar{k}_z \tag{9}$$

で与えられる。

このため$\bar{k}_z\to\infty$の時のΦ_{xy}の収束性が重要となる。$V<c$であれば$k_{xy}\to\pm i\infty$となる（図-2）ので，波数k_{xy}が虚数となる領域でのΦ_{xy}の値について考える。$\Phi(x,y,k_{xy})$のk_{xy}に純虚数値を代入することは，物理的には指数減衰する波（エバネッセント波）を表す。 $\Phi_{xy}(x,y,k_{xy})$を，境界要素法的な考えによって，さまざまな距離にある複数の点音源による速度ポテンシャルの合成であると考えれば，エバネッセント波領域における各点音源からの速度ポテンシャルへの寄与度は，音の伝播距離に応じて指数的に減少する。そのため，$\Phi_{xy}(x,y,k_{xy})$の収束は，受音点から最も近い音源の寄与で代表できる。この距離を$r_{\min}$とすれば，

$$\tilde{\Phi}(x,y,i\beta)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(i\beta r_{\min})\approx(8\pi\beta r_{\min})^{-0.5}e^{-\beta r_{\min}} \tag{10}$$

となる。(9)の絶対値の上限E_{kz}を代表値で計算すればこの値の上限は、

$$\tilde{E}_{kz}<\frac{1}{4\pi WA\sqrt{2\pi r_{\min}}\,r_{\min}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+a^2}}\cdot e^{-ar_{\min}}$$

$$a = A\sqrt{\bar{k}_{z\max}^{2} - 1} \tag{11}$$

となり，打ち切りに関する誤差はほぼ$O(e^{-ar_{\min}})$となる。$\bar{k}_{z\max} = 1 + \mu$として正規化軸で考えれば，$\mu < 1$のとき$O(e^{-r_{\min}\sqrt{\mu}})$となる。上記解析は$\bar{k}_z$の上限値の打ち切りに関する誤差であるが，$\bar{k}_z$の下限値の誤差についても傾向は同様である。

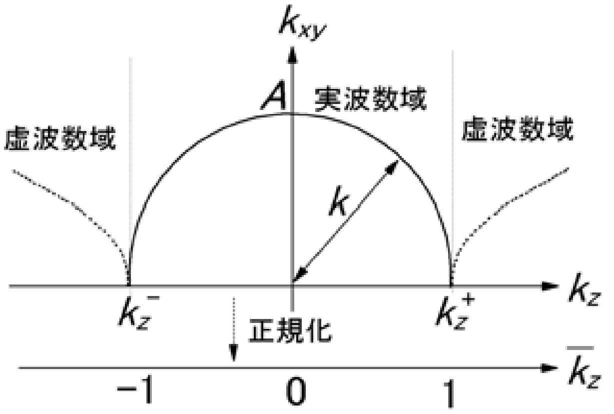

図２　k_zとk_{xy}および$\bar{k}_z$

３．１．３．特異点周辺

k_{xy}=0 ではΦ_{xy}が発散するため数値積分時には避ける必要がある。この誤差については，k_{xy}=0 付近（$\bar{k}_z = \pm 1$付近）のΦ_{xy}の値の振る舞いを解析することが必要となる。**３．１．２**項と同様に，複数の点音源の合成と考えれば，波数$k_{xy} = 0$は，速度ポテンシャルが発散する特異点であることがわかる（図-3)。

この特異点付近での積分値（積分を避けた場合の誤差）について解析する。

$\bar{k}_z = -1$ 付近での積分値 I （積分範囲：$-1-\varepsilon < \bar{k}_z < -1+\varepsilon$）は，

$$I = \frac{1}{2\pi W}\int_{-1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon}\Phi_{xy}(x, y, A\sqrt{1-\bar{k}_z^{\,2}})e^{iW(\bar{k}_z+M)(z-Vt)}\mathrm{d}\bar{k}_z$$

となる。波数$k_{xy} \approx 0$の時，距離rにある点音源による速度ポテンシャルは、

$$\Phi_{xy}(x, y, k_{xy}) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_{xy}r) \approx -\frac{1}{2\pi}\log(k_{xy}r) \tag{12}$$

となるので，最も音源からの距離が短い点音源による寄与が支配的となる。そこで，最も近い音源からの距離を$r_{\min}$とし，その寄与I'を考えると、

$$I' \approx \frac{-1}{2\pi^2 W}e^{iW(1+M)(z-Vt)}\varepsilon\left[\frac{1}{2}\log\varepsilon + \log(Ar_{\min}) - i\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] \tag{13}$$

となる。上記は，特異点付近（$\bar{k}_z$=-1±ε）内の積分を行わなかった場合の誤差である。また$\bar{k}_z$=1 付近の特異点についても，$\bar{k}_z$=-1 と同様の誤差が発生する。これにより，特異点付近の積分を行わない事による誤差は，$O(\varepsilon\log\varepsilon)$　$O(\varepsilon)$となる。

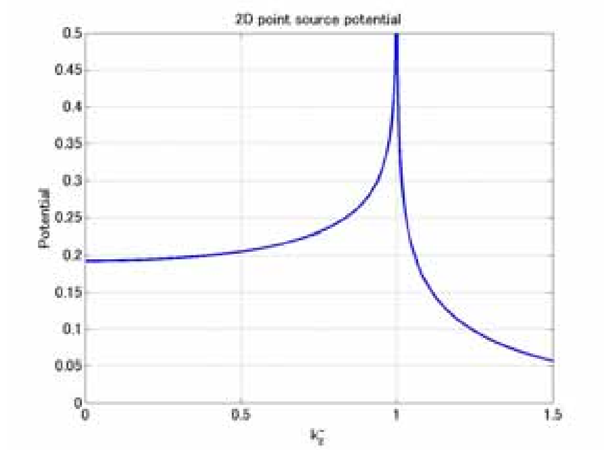

図３　点音源のポテンシャル

３．１．４．積分間隔

k_zの積分間隔は，以下の３つの値を考慮して定めなければならない。

(a)　積分係数$e^{ik_z(z-Vt)}$の値

(b)　２次元音場での波数値

$$k_{xy} = \sqrt{(\tfrac{\omega_S + k_z V}{c})^2 - k_z^2}$$

(c)　特異点k_z^-およびk_z^+の周辺における速度ポテンシャル　$\Phi(x, y, k_{xy})$

それぞれの誤差について解析する。

(a)に関しては，積分係数$e^{ik_z(z-Vt)}$の位相の不連続性を考慮すれば，積分係数の位相間隔$\Delta\theta = \Delta k_z(z - Vt)$は$\pi$よりも十分小さくしなければならない。解析時間範囲内での最大となる z 軸方向距離を$z_{\max}$とすれば，

$$\Delta\theta = \Delta k_z(z - Vt) = \Delta k_z z_{\max} << \pi \tag{14}$$

として定める必要がある。

変化する位相を連続的に積分すべきところを，離散化することにより発生する誤差について考える。積分範囲，$\theta - \Delta\theta/2$～$\theta + \Delta\theta/2$を，１つの離散点で代表したとすると，１点で発生する誤差$E_{\theta 1}$は，$\Delta\theta << 1$とすれば，

$$E_{\theta 1} = \left|\int_{\theta-\frac{\Delta\theta}{2}}^{\theta+\frac{\Delta\theta}{2}}\exp(ix)dx - \Delta\theta\cdot\exp(i\theta)\right| \approx \frac{(\Delta\theta)^3}{24} \tag{15}$$

となる。

$\bar{k}_z$の幅 1 あたりでは、

$$E_{\bar{k}z} = E_{kz} \cdot \frac{\Delta k_z}{\Delta \bar{k}_z} = \frac{(W \cdot z_{\max})^3}{24} (\Delta \bar{k}_z)^2 \quad (16)$$

となる。以上より，積分係数に起因する離散化誤差は$O\{\Delta \bar{k}_z^{\,2}\}$と推定される。

(b)の誤差に関しては，２次元音場での波数値k_{xy}の刻み幅が大きいと，２次元速度ポテンシャル$\Phi(x,y,k_{xy})$が大幅に変化し，誤差の原因となる（図-3)。４．１．２項の場合と同様に考えれば，最も受音点から遠い点音源による速度ポテンシャルが，k_{xy}の変化に対して最も大きく変化する。最も距離が遠い音源から受音点までの距離を$r_{\max}$とすれば，その音源による速度ポテンシャルは，

$$\Phi(x,y,k) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr_{\max}) \approx (8\pi k r_{\max})^{-0.5} e^{i(kr_{\max}+\pi/4)} \quad (17)$$

と表現できる。上記の被積分関数は，特異点付近以外（$|k_{xy}| >> 0$）の場所において振幅の変動よりも位相の変動が主である。従って，(a)と同様に、

$$\Delta k_{xy} r_{\max} << \pi \quad (18)$$

の必要がある。またk_{xy}で等間隔に離散化して積分したとすれば，k_{xy}の幅１あたりの離散化誤差E_{kxy}は，

$$E_{kxy} = \frac{(r_{\max})^3}{24} (\Delta k_{xy})^2 \quad (19)$$

となり，（a）と同様に被積分関数に起因する離散化誤差は$O\{\Delta k_{xy}^2\}$と推定される。

(c)は，特異点付近では，引数k_{xy}が０に近づき，速度ポテンシャル$\Phi(x,y,k_{xy})$の振幅が大きく変化する。従って，数値積分誤差が特異点付近以外よりも大きく発生する可能性がある。前節と同様に，複数点音源モデルで考えると，測定点から最も距離の近い点音源の寄与が支配的となる。そこで再度(15)を用いて最も距離の近い点音源で代表して誤差を検討する。積分間隔をΔk_{xy}として，積分範囲$k_{xy} - \Delta k_{xy}/2$〜$k_{xy} + \Delta k_{xy}/2$を１つの離散点で代表したとすると，１点で発生する誤差E_{p1}は、

$$E_{p1} \approx \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8k_{xy}^2}\right)(\Delta k_{xy})^3 \quad (20)$$

となるので，k_{xy}の幅１あたりの誤差 は、

$$E_p \approx \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8k_{xy}^2}\right)(\Delta k_{xy})^2 \quad (21)$$

となる。以上より、特異点周辺での離散化誤差は$O\{\Delta k_{xy}^{\,2}\}$と推定できる。この誤差E_pと(b)で求めたE_{kxy}を比較すると，k_{xy}が特に小さい場合を除き，E_{kxy}の方が大きい。またE_pは特異点付近のみに発生する誤差である。従ってE_pの全体の誤差への寄与は，E_{kxy}と比較して少なく，通常はE_{kxy}を考慮して離散化間隔を決定すれば良いと予想できる。

４．移動音源のシミュレーションの計算例

４．１．理論解を用いた計算精度の比較

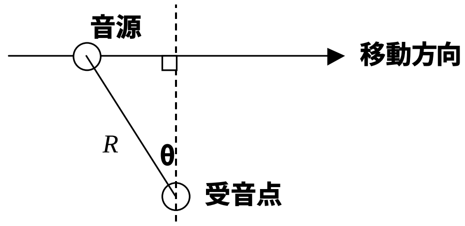

図７　移動音源解析のレイアウト

積分変換による計算解の誤差を実際に確かめるため，幾何音響による解析解が既知な自由音場上の等速移動点音源による音場の数値解析を行った。この音源による受音点での速度ポテンシャルは，次式で与えられる[10]。

$$\phi_G = \frac{s(t - R/c)}{4\pi R(1 - M\cos\theta)} \quad (22)$$

ここで，$s(t)$は音源の体積速度，Rは音源点と受音点間の距離，θは音源と受音とのなす角である（図-7)。この解を厳密解ϕ_Gとし，(19)による積分変換を用いた計算解ϕ_Cとの比較を行った。計算解は，２次元の点音源による波動方程式の解

$$\Phi_{xy}(x,y,k_{xy}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_{xy} r) \quad (23)$$

を元に行った。計算解の算出時には，積分範囲，特異点の打ち切り位置，積分間隔の３つをパラメータとして，厳密解からの差を比較した。差の定義は(24)の通りである。

$$\mathrm{error}[dB] = 10\log_{10} \frac{\sum |\phi_C(k) - \phi_G(k)|^2}{\sum |\phi_G(k)|^2} \quad (24)$$

計算条件は，音源周波数500[Hz]，z軸距離1[m]，速度30[m/s]，解析時間範囲-0.2〜0.2[s]で行った。積分は台形公式を用いて計算した。$\bar{k}_z$が特異点周辺以外（$|\bar{k}_z| < \bar{k}_{zT}$および$|\bar{k}_z| > 2 - \bar{k}_{zT}$）の範囲では$k_z$で等間隔に刻み，その間隔$\Delta k_z$とした。特異点付近（$\bar{k}_{zT} < |\bar{k}_z| < 2 - \bar{k}_{zT}$）では$k_{xy}$で等間隔の刻み，その間隔は$\bar{k}_{zT}$での$\Delta k_{xy}$とした。$\bar{k}_{zT}$は(16)と(19)の誤差

がほぼ同じ値となる値を求めて用いた。なお，特異点付近での積分間隔による誤差 E_p は，本条件（$r_{\max}=r_{\min}=1$）では k_{xy} の積分間隔による誤差 E_{kxy} より小さいため，特異点付近においても同じ Δk_{xy} で積分した。計算のパラメータは，積分範囲 $k_{z\,Max}$，特異点打ち切り位置 ε，積分間隔 Δk_z の３種類とした。また，それぞれの基準値をそれぞれ 1.5，10^{-8}，10^{-4} とし，各パラメータを変化させて誤差を解析した。

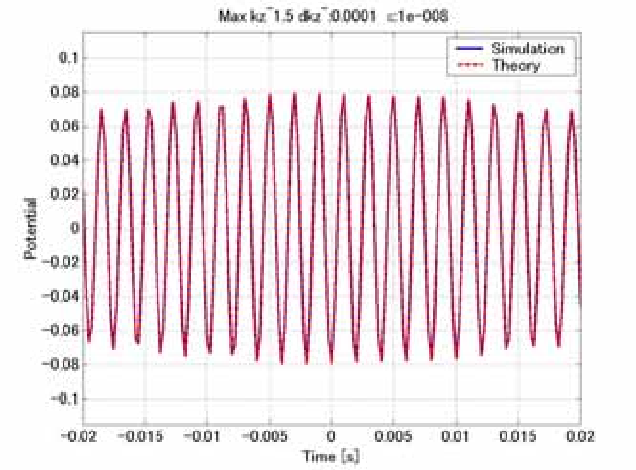

図８　移動音源解析における積分変換解と厳密解

図-8 は，基準値で算出した厳密解（実線）と積分変換解の速度ポテンシャル波形（破線）を示している。図中では，厳密解と積分変換解によるの２つの線が完全に重なっており，理論的にはどちらも同じ値を算出することが確認できる。積分変換解と厳密解の差は、元の波形と比較すると 10^{-6} 以下である。

図-9 は積分範囲 $\bar{k}_{z\max}$ を変化させた場合の誤差で，実線は計算値，破線は理論値である。理論値は，$\bar{k}_{z\max}=1+\mu$ として，$Ce^{-2Ar_{\min}\sqrt{\mu}}$ を表示した。C は定数であり計算値の誤差と理論値の誤差の差が最小となるように定めた。図より計算値での誤差は，理論で示した誤差に近い減衰である事が確認できる。

図-10 は特異点周辺の打切り ε を変化させた場合の誤差である。先と同様に，実線および破線はそれぞれ計算値，理論値の誤差を示し，理論値は $C\varepsilon$ で計算した。C の値は先と同様に定めた。$\varepsilon>10^{-6}$ の範囲で計算値・理論値の誤差の推移はほぼ完全に一致している。$\varepsilon<10^{-6}$ の範囲で計算値の誤差がほぼ一定値となっているのは ε 以外の誤差，すなわち積分間隔および積分範囲による誤差により頭打ちになったものと思われる。

図-11 は，積分間隔 $\Delta\bar{k}_z$ を変化させた場合の誤差を示している。理論値は，$C\Delta k_z^2$ で計算した。図の線種，C の値は先と同様である。積分間隔についてもおおよそ理論値で示したオーダーで誤差が生じる事がわかる。以上より，検討した３種類の誤差について，ほぼ理論どおりの結果となっていることがわかる。

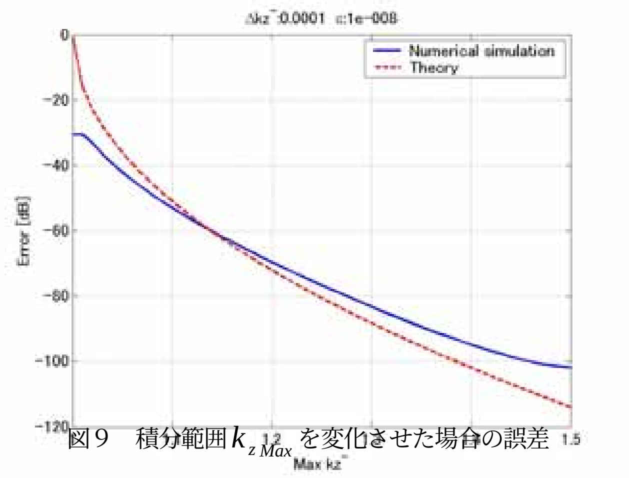

図９　積分範囲 $k_{z\,Max}$ を変化させた場合の誤差

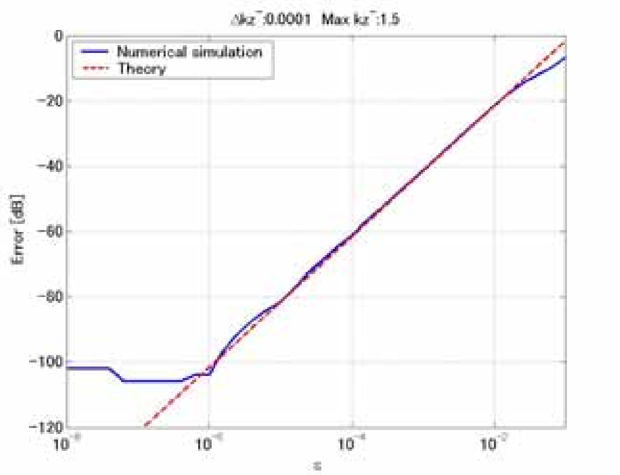

図 10　特異点の打切り ε を変化させた場合の誤差

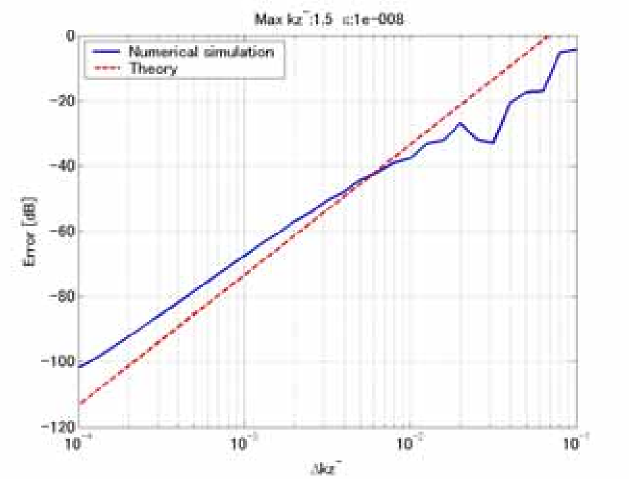

図 11　積分間隔 $\Delta\bar{k}_z$ を変化させた場合の誤差

５．おわりに

積分変換を用いた移動音源のシミュレーション方法についての実際の数値計算方法とその誤差について検討した。誤差には，積分範囲，特異点周辺の打ち切り，積分間隔によるものがあり，さらに積分間隔による誤差には３つの要因が考えられることを述べ、それぞれの誤差のオーダーを明らかにした。さらに幾何音響に基づく厳密解と積分変換による数値解析解との比較により，誤差のオーダーが理論的に検討した結果とほぼ一致することを明らかにした。本結果から，積分変換を用いたシミュレーション時の精度についておおよそ予測が可能となった。

＜参考文献＞

[1] 井上瑞希，藤原恭司，尾本章：障壁の挿入損失に関する一考察．日本音響学会，58(10), 639-646 (2002).

[2] T. Ishizuka, K. Fujiwara : Performance of noise barriers with various edge shapes and acoustical conditions. Applied Acoustics 65, pp. 125-141 (2004).

[3] 福島昭則,坂本慎一： 道路交通騒音予測への２次元波動解析の適用に関する数値解析的検討．騒音振動研究会, N-2003-71 (2003).

[4] D.Duhamel: Efficient calculation of the three dimentional sound pressure field around a noize barrier. Journal of Sound & Vibration, 197, 547-571 (1996).

[5] 井上瑞希，藤原恭司：防音壁吸音性円筒エッジの有効取付長に関する研究 ”，日本音響学会，59(3), 141-143 (2003).

[6] Seigo Ogata, Hideo Tsuru, Hirofumi Nakajima and Kyoji Fujiwara: Investigation for insertion loss of noise barrier for sound source moving at high speed. Acoustical Science and Technology, 24(3), 148-150 (2003).

[7] 緒方正剛，鶴秀生，中島弘史，藤原恭司：超高速移動音源に対する防音壁の遮音量算出に関する研究．日本音響学会，59(12), 713-722 (2003).

[8] 伊藤毅：音響工学原論．コロナ社, (1955).

[9] M. Tohyama & T. Koike：Acoustic Signal Processing. Academic Press, (1998).

[10] Morse and Ingard: Theoretical Acoustics. McGraw-Hill, 717-724 (1968).